Универзитет у Београду
Машински факултет

Радиша Ж. Јовановић

Фази логика, моделовање и управљање

Београд, 2020.

Универзитет у Београду
Машински факултет

Фази логика, моделовање и управљање

Радиша Ж. Јовановић

Београд, 2020.

Др Радиша Ж. Јовановић, дипл. инж. маш., ванредни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Фази логика, моделовање и управљање

I издање

Рецензенти:
Проф. др Зоран Рибар, редовни професор у пензији,
Универзитет у Београду, Машински факултет
Проф. др Зоран Бучевац, редовни професор у пензији,
Универзитет у Београду, Машински факултет

Издавач:
Машински факултет Универзитета у Београду
ул. Краљице Марије 16, 11120, Београд 35
тел. (011) 3302-384
факс (011) 3370-364

За издавача:
Проф. др Радивоје Митровић, декан

Главни и одговорни уредник:
Проф. др Милан Лечић

Одобрено за штампу одлуком Декана Машинског факултета у Београду
бр. 25/2020 од 6.11.2020. године

Лектор:
Проф. др Славко Петаковић

Дизајн корица:
Мина Михаиловић

Тираж:
200 примерака

Штампа:
PLANETA PRINT

ISBN 978-86-6060-059-4

Садржај

ПРЕДГОВОР

Стварни свет је исувише компликован да би се могао прецизно описати. Непрецизне информације људи користе хиљадама година. Међутим, донедавно се оне нису уопште користиле у методама заснованим на конвенционалној математици. Због тога је корисност и ефикасност многих метода пројектовања, управљања, моделовања, предвиђања и доношења одлука била знатно ограничена – тим пре јер су у неким системима непрецизне информације једине доступне информације. Осим тога, свака врста ,,прецизних" информација измерена је са одређеном (често значајном) погрешком, па је такође непрецизна. Опште начело је да би добра инжењерска теорија требало да буде способна да ефикасно користи све доступне информације. За многе практичне системе важне информације долазе из два извора: како се налазимо у информационој ери, људско знање постаје све важније, и један извор информација су стручњаци који своје знање о систему описују на природним језицима; друга су мерења са разних сензора и математички модели који су изведени на основу физичких закона. Стога је важан задатак комбиновати ове две врсте информација у пројектовању. Да би се то постигло, потребна је теорија која ће системски да формулише људско знање према сличном моделу који се користи за формулисање мерених података и математичких модела, и имплементира га у инжењерске системе.

Све наведено представља јединствено обележје теорије фази система, и оправдава постојање теорије фази система као независне гране у инжењерству. Она укључује различите технологије, а ова књига пружа читаоцу основне информације о теорији фази скупова, фази логике, фази моделовања и управљања. Примарни циљ је да се представи довољна основа у фази моделовању и управљању како би се могла спроводити даља проучавања у напредним методологијама меког рачуна и вештачке интелигенције. Намера аутора није била да оптерети читаоце непотребним материјалом, било из математичке или инжењерске перспективе, већ да пружи равнотежу између математичких и инжењерских аспеката фази приступа. Да ли је у томе успео, просудиће заинтересовани читаоци.

Добро разумевање теорије главни је услов за њену примену и побољшање или развој властитих идеја и концепата. Да би се то олакшало, у књизи су приказане методе илустроване адекватним примерима и сликама.

Књига *Фази логика, моделовање и управљање* је конципирана тако да обухвата области предвиђене наставним планом и програмом предмета *Фази управљачки системи*, који је у склопу Мастер академских студија, на Модулу за аутоматско управљање, на Машинском факултету у Београду. Међутим, узимајући у обзир актуелност и значај упознавања са једном од области меког рачуна и вештачке интелигенције – а теорија фази система то јесте – књига је написана тако да могу да је користе и студенти са других усмерења Машинског факултета, као и са других факултета, у чијим наставним плановима и програмима је заступљена ова проблематика.

Аутор посебну захвалност изражава рецензентима проф. др Зорану Рибару и проф. Зорану Бучевцу на корисним сугестијама које су утицале на формирање коначног садржаја и на побољшање квалитета ове књиге.

Свима онима који су на неки начин помогли у току писања ове књиге, аутор се најтоплије захваљује.

Београд, новембар 2020. године   Радиша Ж. Јовановић

2.1 Класични скупови

У математици појам *скуп* представља основни појам и не дефинише се експлицитно. Другим речима, немогуће га је дефинисати помоћу једноставнијих појмова. Интуитивно, појам скупа представља целину коју чине *елементи* или *чланови* тог скупа. Основни однос између елемената и скупова је *припадање.* Израз *a припада A* се симболичким математичким језиком пише $a \in A$. Каже се и да је *a елемент скупа A*, или да је *a садржан у A*. Израз *a не припада скупу A*, односно негација формуле $a \in A$, се симболички означава са $a \notin A$. Симболичко означавање скупова изводи се словима латинског алфабета: скупови се обично означавају великим словима а њихови елементи малим.

Скупови се могу задати на више начина.

(1) Први начин је навођењем свих његових елемената, између витичастих заграда:

- $\{1, 5, 7\}$ - Коначан скуп, са елементима 1, 5 и 7. Овакав начин задавања скупова користи се за коначне скупове са не тако великим бројем елемената, које је технички могуће све навести.
- $\{1, 2, ..., n\}$ - Коначан скуп са већим бројем елемената које технички није могуће све навести, због чега се стављају три тачке ,,...” које значе ,,и тако даље, по истом обрасцу”. Одговарајући образац мора да буде очигледан.
- $\{2, 4, 6, 8, ...\}$ Скуп свих парних бројева. Примећује се да је овај скуп, за разлику од претходног, бесконачан.
- $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ Скуп свих природних бројева.

(2) Други начин је задавањем *својства* које сви његови елементи морају да имају. Такви скупови се записују у следећем облику:

$$A = \{x | x \text{ има својство } P(x)\} \text{ или } A = \{x | P(x)\},$$

где је са $P(x)$ означено својство које може имати објекат x.

(3) Трећи начин представљања скупа, који је интересантан за уопштење теорије скупова на теорију фази скупова, је коришћењем *карактеристичне функције* $\mu_A(\cdot)$.

Дефиниција 2.1 *Нека је скуп A дефинисан на простору* $\mathcal{X}$. *Функција* $\mu_A(\cdot) : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$ *је* **карактеристична функција** *скупа A ако и само ако за свако* $x \in \mathcal{X}$ *важи*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{2.1}$$

Суштински, постоји само мала разлика између дефиниција скупова помоћу исказа $P(x)$ и дефиниције засноване на карактеристичној функцији.

Услов $P(x)$ је истинитосна функција, тј. додељује вредности *тачно* и *нетачно* сваком елементу (ако неки елемент x има особину P, тада је $P(x)$ *тачно*, у супротном *нетачно*), док карактеристична функција враћа вредност 1 и 0 елементима. Комбинујући ове две методе може се дефинисати значење исказа P на следећи начин: $P(x) \Leftrightarrow (\mu_P(x) = 1)$.

2.2 Фази скупови

Идеју и мотивацију за фази скуповима размотрићемо кроз следеће примере.
Пример 2.1 Нека је A скуп свих природних бројева *већих или једнаких* од 10. Он се може приказати на следећи начин:

$$A = \{x \mid x \in \mathcal{N}, x \geq 10\}. \tag{2.2}$$

Пример 2.2
Нека је B скуп свих реалних бројева који су *много већи* од 10. Математички, то се може представити са:

$$B = \{x \mid x \in \mathcal{R}, x \gg 10\}. \tag{2.3}$$

Главна разлика између ова два скупа је што релација (2.2) потпуно дефинише скуп A, док релација (2.3) није довољна за потпуно дефинисање скупа B. Јасно је да су бројеви 11, 12, 1546, елементи скупа A. Већина људи ће се сложити да бројеви 15 328, 25^{11} припадају скупу B, али да ли ће то рећи и за бројеве 15 и 50? Дакле, проблем је одредити који је најмањи реални број који задовољава услов да је *много већи* од 10. Овај проблем се може решити коришћењем алтернативног начина за описивање скупа.

Анализирајући претходни пример може се закључити да карактеристична функција из дефиниције 2.1 не може описати скуп B, нити може помоћи у одређивању најмањег реалног броја који припада скупу B. Међутим, проширењем појма карактеристичне функције може се то учинити на елегантан начин. Наиме, уместо одређивања најмањег реалног броја који припада скупу B, може се рећи да *сви* реални бројеви већи од 10 припадају скупу B, али са различитим *степеном припадности*. На тај начин, *карактеристична функција* се уопштава у *функцију припадности* која сваком $x \in \mathcal{X}$ додељује вредност из јединичног интервала $[0, 1]$ уместо из двоелементног скупа $\{0, 1\}$. Сада се може дати и дефиниција фази скупа.

> **Дефиниција 2.2** **Фази скуп** *A дефинисан на универзалном скупу $\mathcal{X}$ је скуп уређених парова*
> $$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} \tag{2.4}$$
> *где*
> $$\mu_A(\cdot) : \mathcal{X} \longrightarrow [0, 1] \tag{2.5}$$
> *представља* **функцију припадности** *фази скупа A. Ова функција додељује сваком елементу $x \in \mathcal{X}$ његов степен припадности фази скупу A.*

ПОГЛАВЉЕ

4

Концепт релација

Релације представљају и квантификују везе између објеката, односно представљају начин да се опишу везе, зависности између објеката, елемената, итд. Код класичних релација могуће су две ситуације: два елемента *јесу у релацији*, или два елемента *нису у релацији*, ако је у питању бинарна релација. Код фази релација, одговор ће бити другачији. Но, пре тога, треба се подсетити и разлике између релација и функција. И функције и релације представљају *пресликавања*. Функције су пресликавања која дозвољавају да се више елемената може пресликати у исти елемент (тзв. many to one пресликавања). Релације дозвољавају и да се више елемената преслика у један исти елемент, као и један елемент у више елемената (many to many пресликавања).

4.1 Класичне релације

У разним областима се често јавља потреба да се између одређених објеката успоставе извесне *везе*, *односи* или *релације*. На пример, често се јавља потреба:

- да се извесни објекти упореде према неком задатом критеријуму,
- да се поређају у складу са неким правилом,
- да се одреде извесне сличности између објеката, и да се они групишу у групе међусобно сличних објеката, итд.

У математици се све ово може урадити коришћењем појма *релације* који представља уопштење концепта функције. Пре тога неопходно је дефинисати појмове Картезијевог производа скупова и уређеног пара.

Нека су X и Y непразни скупови, и нека је елементу x из првог скупа X придружен неки елемент другог скупа $y \in Y$. На тај начин добија се један пар елемената x и y који се назива *уређени пар* и означава се са (x, y). Дакле, уређени пар (x, y) је окарактерисан својством да први елемент x припада дефинише и припадност елемента неком фази скупу – помоћу функције припадности. Фази релације представљају генерализацију класичних релација, које као такве представљају само један гранични случај.

Дефиниција 4.4 Фази релација *R између класичних скупова $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ представља фази скуп дефинисан на Картезијевом производу $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$:*

$$R \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}_n\},$$

тј. представља скуп парова

$$R = \{((x_1, x_2, \ldots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n\},$$

где $\mu_R : \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n \longrightarrow [0,1]$ представља функцију припадности релације R.

Функција припадности $\mu_R(\cdot)$ додељује свакој n-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ степен припадности који представља јачину релације између елемената n-торке.

Као посебан случај, бинарна фази релација је фази скуп дефинисан на Картезијевом производу два класична скупа.

Бинарна фази релација

Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ непребројиви (континуални) универзални скупови и $\mu_R : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$. Тада је

$$R = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}$$

бинарна фази релација на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Ако су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ пребројиви (дискретни) скупови, тада је

$$R = \sum_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}.$$

Бинарна релација на коначном Картезијевом производу се обично представља *фази релационом матрицом*, тј. матрицом чији су елементи вредности припадности одговарајућих парова датој релацији.

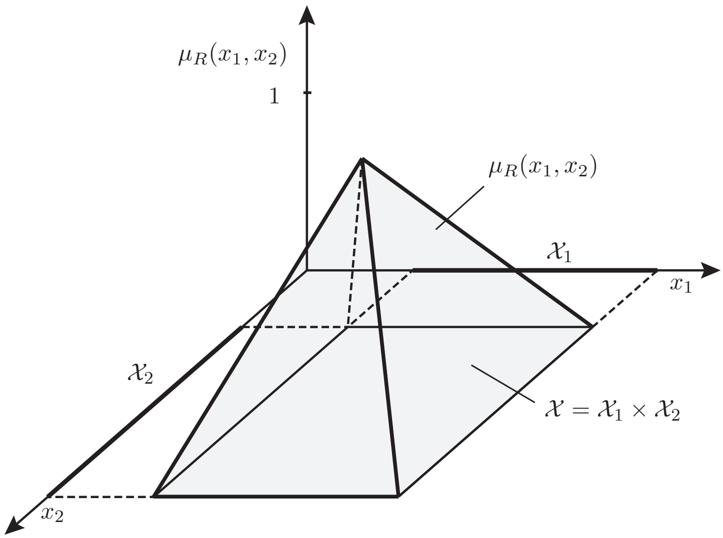
Пример 4.10 Нека је $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1,2,3\}$. Тада је ,,приближно једнак” бинарна релација описана са

$$R(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{1}{(1,1)} + \frac{1}{(2,2)} + \frac{1}{(3,3)} + \frac{0,8}{(1,2)} + \frac{0,8}{(2,3)} + \frac{0,8}{(2,1)} + \frac{0,8}{(3,2)} + \frac{0,3}{(1,3)} + \frac{0,3}{(3,1)}$$

Функција припадности μ_R ове релације се такође може описати и аналитички и у матричном облику:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x = y, \\ 0,8 & \text{за} \quad |x-y| = 1, \\ 0,3 & \text{за} \quad |x-y| = 2. \end{cases} \qquad R(X,Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,3 \\ 0,8 & 1,0 & 0,8 \\ 0,3 & 0,8 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

У општем случају, функција припадности релације $\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ је хиперповршина у $(n+1)$-димензионалном простору. Пример функције припадности фази релације за $n = 2$ приказан је на слици 4.6.



Слика 4.6: Пример непрекидне функције припадности фази релације $\mu_R(x_1, x_2)$

4.3 Операције над фази релацијама

4.3.1 Основне операције

Основне операције над фази релацијама, као што су унија, пресек и комплемент, концептуално следе одговарајуће операције над фази скуповима. Разлог томе је чињеница да фази релације представљају фази скупове дефинисане на вишедимензионалном простору. Без губљења у општости, дефиниције поменутих операција биће дате за бинарне операције.

Дефиниција 4.5 *Нека су R и S бинарне релације дефинисане на Картезијевом производу универзалних скупова $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.* **Пресек** *релација R и S се дефинише функцијом припадности:*

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min\left(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right), \ \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{4.7}$$

Уместо операције min *може се користити било која T-норма.*

Дефиниција 4.6 *Нека су R и S бинарне релације дефинисане на Картезијевом производу универзалних скупова $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.* **Унија** *релација R и S се дефинише функцијом припадности:*

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max\left(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right), \ \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \tag{4.8}$$

Уместо операције max *може се користити било која S-норма.*

ПОГЛАВЉЕ

5

Фази логика и приближно закључивање

5.1 Лингвистичке променљиве

У свакодневном животу се често користе речи за описивање одређених величина, тј. променљивих. На пример, када се каже ,,дан је топао”, или еквивалентно ,,данашња температура је висока”, користи се реч ,,висока” да се опише променљива ,,данашња температура”. Дакле, променљива ,,данашња температура” узима реч ,,висока” као своју вредност. Јасно, променљива ,,данашња температура” може узети 25°, 32°, итд. као своје вредности. У случају када нека променљива као вредности узима нумеричке вредности (бројеве), постоји добро утврђена математичка основа за њихово третирање. Међутим, када променљива као вредности узима речи, не постоји формална основа за тако нешто у класичној математичкој теорији. У циљу дефинисања једне такве основе, уводи се концепт *лингвистичке променљиве*. Грубо говорећи, ако променљива може за своје вредности да узима речи из природног језика, она се назива лингвистичка променљива. Проблем који се намеће је како дефинисати речи помоћу математичких појмова. Решење се налази у фази скуповима, па се сходно претходном може увести следећа дефиниција:

> **Дефиниција 5.1 Лингвистичка променљива** *је променљива која за своје вредности узима речи из природног језика, при чему су речи одређене фази скуповима дефинисаним на универзалном скупу на којем је променљива дефинисана.*

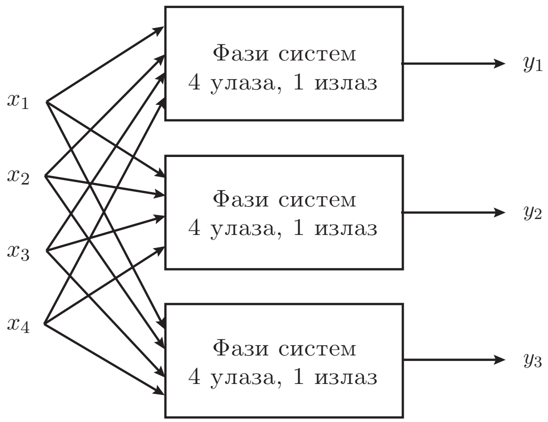
Пример 5.1 Брзина кретања аутомобила представља променљиву x која узима вредности из интервала $[0, v_{max}]$, где је v_{max} максимална брзина аутомобила. Могу се дефинисати три фази скупа: ,,*мала*”, ,,*средња*” и ,,*велика*”, као на слици 5.1. Ако се x посматра као лингвистичка променљива, она може узети ,,мала”, ,,средња” и ,,велика” као своје вредности. Дакле,

ПОГЛАВЉЕ

6

База фази правила и механизам фази закључивања

У општем случају, фази системи које пројектујемо могу бити вишеструко преносни, то јест, да имају више улаза и више излаза. Међутим, ми ћемо у наставку разматрати фази системе дефинисане на улазном универзалном скупу $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \cdots \mathcal{X}_n \subset \mathcal{R}^n$ и излазном $\mathcal{Y} \subset \mathcal{R}$. Дакле, тема ће бити једино вишеструко преносни системи који имају више улаза и један излаз, јер се вишеструко преносни систем, који има више излаза, може декомпоновати у скуп система са једним излазом. На тај начин се на пример, пројектовање фази система са 4 улаза и 3 излаза своди на засебно пројектовање три фази система која имају 4 улаза и један излаз, и њихово спајање, као што је приказано на слици 6.1.



Слика 6.1: Декомпозиција вишеструко преносног фази система са више излаза у скуп вишеструко преносних фази система са једним излазом

6.1 База фази правила

6.1.1 Структура базе фази правила

У поглављу 5 разматран је поступак добијања закључка једног фази правила, а кроз различите начине моделовања фази импликације, T-норми, и све то за генерализовани modus ponens као правило закључивања. У практичним применама, најчешће имамо више фази правила, не само једно, и она чине *базу фази правила*. Дакле, база фази правила се састоји од скупа фази **ако-онда** правила и она представља срж фази система, у смислу да се све друге компоненте користе за имплементацију ових правила на један логичан и ефикасан начин. Претпоставимо да база правила садржи следећа фази **ако-онда** правила:

$$\begin{aligned}
&r_1: \textbf{ Ако } x_1 \text{ je } A_1^1 \textbf{ и } x_2 \text{ je } A_2^1 \textbf{ и } \dots \textbf{ и } x_n \text{ je } A_n^1, \textbf{ онда } y \text{ je } B_1;\\
&\vdots\\
&r_k: \textbf{ Ако } x_1 \text{ je } A_1^k \textbf{ и } x_2 \text{ je } A_2^k \textbf{ и } \dots \textbf{ и } x_n \text{ je } A_n^k, \textbf{ онда } y \text{ je } B_k;\\
&\vdots\\
&r_M: \textbf{ Ако } x_1 \text{ je } A_1^M \textbf{ и } x_2 \text{ je } A_2^M \textbf{ и } \dots \textbf{ и } x_n \text{ je } A_n^M, \textbf{ онда } y \text{ je } B_M,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

где је M број фази правила, а A_i^k и B_k су фази скупови дефинисани на $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $\mathcal{Y} \subset \mathcal{R}$, следствено. У премисама правила се налази n величина које дефинишу вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T, \; x_i \in \mathcal{X}_i, \; \forall i = 1, 2, ...n. \tag{6.2}$$

Ако са $\mathcal{X}$ означимо Картезијев производ

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_n,$$

тада $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ представља улазну величину (вектор улаза) фази система, а $y \in \mathcal{Y}$ излаз фази система.

6.1.2 Особине базе правила

Будући да се база фази правила састоји од скупа правила, однос између тих правила и правила у целини намеће занимљива питања. На пример, покривају ли правила све могуће ситуације са којима се фази систем може суочити? Постоје ли конфликти међу тим правилима? Да бисмо одговорили на оваква питања, уводимо следеће појмове [40].

Дефиниција 6.1 *Скуп фази* **ако-онда** *правила је* **комплетан** *ако за било које* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ *постоји најмање једно правило, рецимо* r_k*, у бази фази правила облика* (6.1)*, тако да важи*

$$\mu_{A_i^k}(x_i) \neq 0, \; \textit{за свако} \;\; i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.3}$$

Лема 6.2 *Ако је фази скуп A' синглеон фази скуп, то јест, ако је фази скуп A' дискретан улазни податак:*

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0, & \text{у осталим случајевима} \end{cases} \tag{6.19}$$

где је $\mathbf{x}'$ нека вредност из $\mathcal{X}$, тада се Мамданијева и Ларсенова метода поједностављују и постају, следствено:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,\ldots,M} \left\{ \min\left(\mu_{A_1^k}(x_1'), \ldots \mu_{A_n^k}(x_n'), \mu_{B_k}(y) \right) \right\}, \tag{6.20}$$

односно

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,\ldots,M} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i') \cdot \mu_{B_k}(y) \right\}. \tag{6.21}$$

Доказ. Ако се (6.19) замени у (6.15) и (6.16), може се закључити да се $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}$ достиже управо за $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Стога, (6.15) се своди на (6.20), а (6.16) на (6.21). ■

Лема 6.1 показује да, иако се поступци закључивања засновани на појединачном правилу и композицији концептуално разликују, они дају исти механизам фази закључивања у извесним, важним случајевима.

Лема 6.2 указује да се рачунање у току фази закључивања може увелико поједноставити ако је улаз фази синглтон. Најтежа израчунавања у (6.15) и (6.16) су $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}$, и она нестају у (6.20) и (6.21).

Недостатак Мамданијеве и Ларсенове методе закључивања је у томе што ако су за неко $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ вредности $\mu_{A_i^k}(x_i)$ веома мале, тада ће и $\mu_{B'}(y)$ добијено из (6.15) или (6.16) бити веома мало. Ово може изазвати проблеме у имплементацији.

6.3 Евалуација фази правила

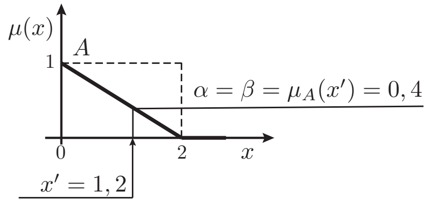
6.3.1 Евалуација премиса правила

У процесу фази закључивања најпре је потребно одредити *степен активације*, тј. истинитосну вредност сваког појединачног правила. Јасно, овај степен, за разлику од класичне логике, може узети било коју вредност из интервала $[0, 1]$. Уколико је степен активације неког правила једнак нули, тада то правило не учествује у процесу закључивања. Што је већи овај степен, то је већи утицај посматраног правила на коначни резултат закључивања. Метода израчунавања степена активације премисе правила, који ће се означавати са β, зависи од њене форме. У случају најједноставније премисе

$$\textbf{ако } x \text{ је } A \tag{6.22}$$

за $x = x'$ степен активације правила је једнак степену сагласности између x' и фази скупа A, тј. степену припадности вредности x' фази скупу A, и који ће се означавати са α, слика 6.2:

$$\beta = \alpha = \mu_A(x'). \tag{6.23}$$

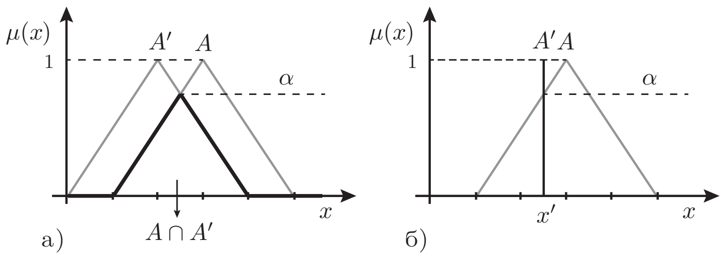


Слика 6.2: Одређивање степена активације једноставне премисе (6.22)

Размотримо поново једноставну премису из (6.22) у ситуацији када улаз x' има облик фази броја A'. Степен сагласности α, тј. сличност два фази скупа A и A', што истовремено представља и степен активације правила, може се одредити на следећи начин:

$$\alpha = \beta = \max_{x \in \mathcal{X}} \min(\mu_A(x), \mu_{A'}(x)),$$

за случај примене Мамданијеве методе закључивања. У операцији дефинисаној претходном једначином, најпре се одреди $A \cap A'$, а потом максимум добијеног резултата, слика 6.3а. Уколико је фази скуп A' једноелементни скуп (синглтон), као на слици 6.3б, тада је његова сагласност са фази скупом A једнака степену припадности x' фази скупу A, $\mu_A(x')$.



Слика 6.3: Одређивање степена сагласности α применом Мамданијеве методе: а) за два фази скупа A и A' и б) за специјалан случај фази скупа $A' = x'$ (синглтон фази скуп)

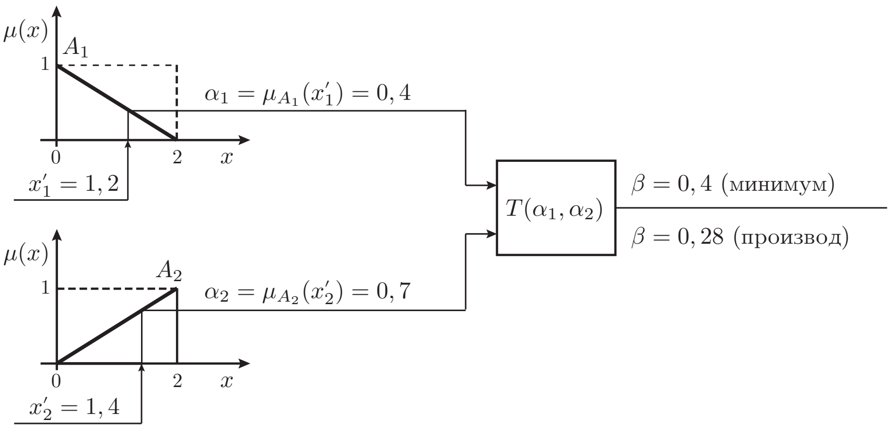
У случају сложене премисе, која се састоји од две једноставне премисе повезане логичким оператором **и**:

$$\textbf{ако } x_1 \text{ је } A_1 \textbf{ и } x_2 \text{ је } A_2, \tag{6.24}$$

за нумеричке вредности аргумената $x_1 = x_1'$ и $x_2 = x_2'$ степен активације β се израчунава као степен припадности релацији R:

$$\beta = \mu_R(x_1', x_2') = \mu_{A_1 \cap A_2}(x_1', x_2') = T\left(\mu_{A_1}(x_1'), \mu_{A_2}(x_2')\right) = T(\alpha_1, \alpha_2),$$

где су A_1 и A_2 фази скупови, T је нека од T-норми, на пример, мимимум или производ, слика 6.4, а α_1 и α_2 представљају степене сагласности сваке од једноставних премиса.



Слика 6.4: Одређивање степена активације сложене премисе (6.24)

Наравно, премисе могу бити сложеније, тј. могу да садрже више једноставних премиса, али је поступак одређивања степена активације исти. Одређивање степена активације сложене премисе, тј. премисе које се састоји од више једноставних, се понекад назива и *агрегација*. У претходном примеру (слика 6.4) аргументи премисе $x_1' = 1,2$ и $x_2' = 1,4$ су биле дискретне вредности. Међутим, аргументи премисе (вредности улаза фази система) такође могу бити у облику фази скупова $A_i^{'}$ који се разликују од фази скупова A_i који се појављују у овим премисама.

Одређивање степена активације одређених правила даје информације о тим правилима, и у којој мери она треба да суделују у процесу закључивања. То такође омогућава да се одреде активиране функције припадности закључака одређених правила за дату вредност улаза $x_i^{'}$ фази система.

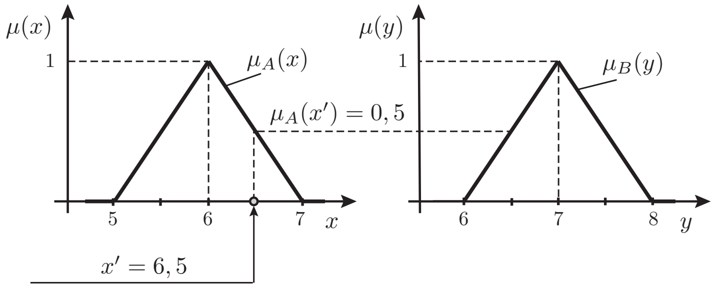
6.3.2 Евалуација закључака правила

Одређивање активираних функција припадности закључака правила се заснива на степену активације њихових премиса. Нека је неопходно одредити закључак правила

$$\textbf{ако } x \text{ је } A, \textbf{ онда } y \text{ је } B \tag{6.25}$$

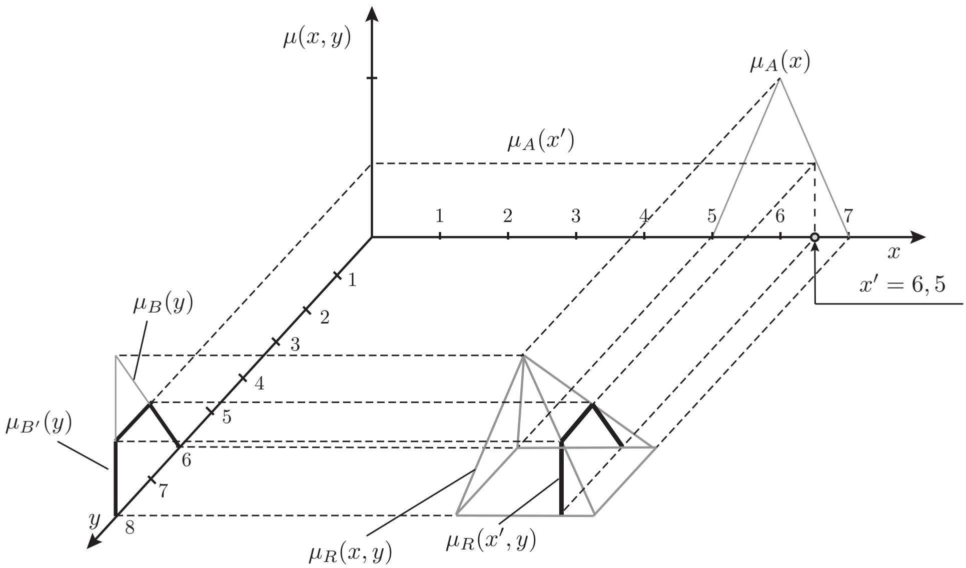
са функцијама припадности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$ приказаним на слици 6.5, и вредношћу улаза $x' = 6,5$. Са слике се може уочити да је степен активације премисе правила $\beta = \alpha = 0,5$. Применом Мамдани импликације може се одредити активирана функција припадности импликације $A \to B$, која представља неку релацију R:

$$\mu_R(x, y) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right), \quad R = A \to B.$$



Слика 6.5: Функције припадности фази скупова A и B из фази правила (6.25)

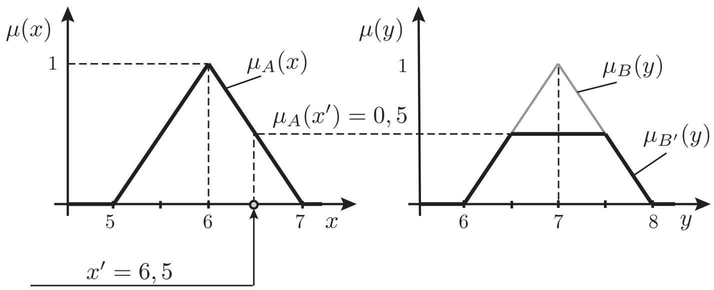
Површ која представља релацију $\mu_R(x, y)$ приказана је на слици 6.6 и састоји се од цилиндричне екстензије скупова A и B на Картезијев производ $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. За дату вредност улаза $x = x'$ добија се дводимензионална функција припадности $\mu_R(x', y)$, а пројекција функције $\mu_R(x', y)$ на раван (μ, y) означена са $\mu_{B'}(y)$ представља закључак датог правила.



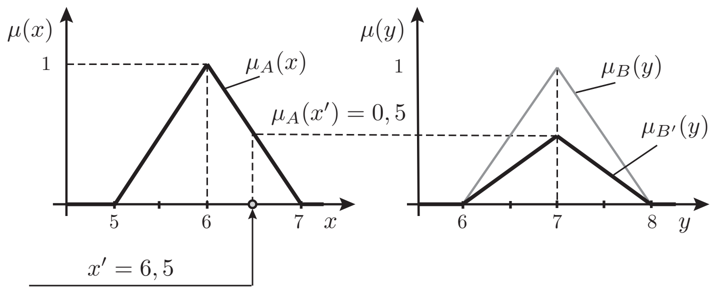
Слика 6.6: Илустрација фази закључивања за правило облика **ако** x је A, **онда** y је B, за вредност $x = x'$

Лако се може уочити да се захваљујући стварној вредности улаза x' резултат закључивања $\mu_{B'}(y)$ разликује мање или више од оригиналне функције припадности $\mu_B(y)$. У специјалном случају, када је степен активације премисе правила $\mu_A(x') = 1$, функције припадности $\mu_{B'}(y)$ и $\mu_B(y)$ су једнаке. Функција припадности $\mu_{B'}(y)$ се назива и *модификована функција припадности закључка правила*, а фази скуп B' *модификовани фази скуп B закључка фази правила* [27].

Да би се одредила модификована функција припадности $\mu_{B'}(y)$ закључка, није неопходно одређивати тродимензионалну функцију припадности импликације $\mu_R(x,y)$. У пракси се то може учинити знатно једноставније. Као што се може приметити са слике 6.6, функције $\mu_R(x',y)$ и $\mu_{B'}(y)$ су идентичне и могу се добити у случају Мамдани импликације једноставним ограничењем („одсецањем") функције припадности закључка $\mu_B(y)$ на ниво (вредност) који је једнак степену активације $\mu_A(x')$ премисе правила. Према томе, у пракси, закључивање применом Мамдани импликације се врши као на слици 6.7. Други оператори импликације имаће за последицу другачије модификације функције припадности закључка правила. На слици 6.8 је приказан резултат закључивања применом оператора алгебарски производ, тј. Ларсенове методе закључивања.



Слика 6.7: Поједностављена метода добијања закључка фази правила применом Мамдани импликације



Слика 6.8: Поједностављена метода добијања закључка фази правила применом Ларсенове импликације

У случају када улаз x' представља фази скуп A', који се разликује од скупа A у премиси правила

ако x је A, **онда** y је B,

поступак добијања активиране функције припадности $\mu_{B'}(y)$ закључка правила приказан је на слици 6.9. Најпре, композиција релације $\mu_R(x,y)$ и фази скупа A', или у пракси његове цилиндричне екстензије $ce(A')$, даје фази скуп

ПОГЛАВЉЕ

7

Фазификатори и дефазификатори

У поглављу 6 детаљно смо анализирали различите механизме фази закључивања, приликом којих се комбинују правила из базе фази правила у једно пресликавање фази скупа A' из $\mathcal{X}$, у фази скуп B' дефинисан на $\mathcal{Y}$. Међутим, како су у већини практичних примена улази и излази фази система реалне вредности (тј. бројеви), неопходно је пројектовати интерфејс између фази закључивања и окружења. Ти интерфејси, односно посредници, су *фазификатори* и *дефазификатори*.

7.1 Фазификатори

Фазификатор, или процес *фазификације*, се дефинише као пресликавање реалне вредности $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$ у фази скуп A' дефинисан на $\mathcal{X}$. Поставља се питање који су критеријуми у дефинисању неког фазификатора? Најпре, фазификатор треба да узме у обзир чињеницу да је улаз у систем дискретна вредност $\mathbf{x}^*$, тј. тачка у n-димензионалном простору $\mathcal{X}$, па фази скуп A' треба да има велики степен припадности у тачки x^*. Друго, ако је улаз у фази систем зашумљен, тада је пожељно да фазификатор може да помогне у сузбијању шума. Треће, фазификатор би требало да помогне у поједностављењу израчунавања присутних код фази закључивања. Из једначина (6.15) и (6.16) можемо видети да је код фази закључивања најкомпликованије израчунавање супремума, тј. $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}$, те је стога наш циљ управо да поједноставимо израчунавања која укључују $\sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}}$. У наставку, размотрићемо три најчешћа фазификатора.

- *Синглтон фазификатор*: пресликава реалну вредност, тј. тачку $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ у фази синглтон фази скуп A' дефинисан на $\mathcal{X}$, који има степен припадности једнак 1 у тачки $\mathbf{x}^*$ и степен припадности једнак 0 у свим другим тачкама из скупа $\mathcal{X}$, односно

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7.1}$$

ПОГЛАВЉЕ

8

Фази системи и њихове особине

8.1 Аналитички опис неких класа фази система

Разноврсност у погледу метода закључивања, фазификације и дефазификације резултује великим бројем различитих типова фази система који се могу добити њиховим комбиновањем. Међутим, лако се може показати да свака комбинација поменутих метода не резултује корисним фази системом. У добијању аналитичког описа користићемо методу осредњавања центара као методу дефазификације.

Лема 8.1 *Претпоставимо да је фази скуп B_k из једначине* (6.1) *нормалан, са центром $\bar{y}^k$. Тада фази системи са базом правила* (6.1), *Ларсеновом методом закључивања* (6.16), *синглтоним фазификатором* (7.1) *и методом осредњавања центара као дефазификатором* (7.8) *имају следећи облик:*

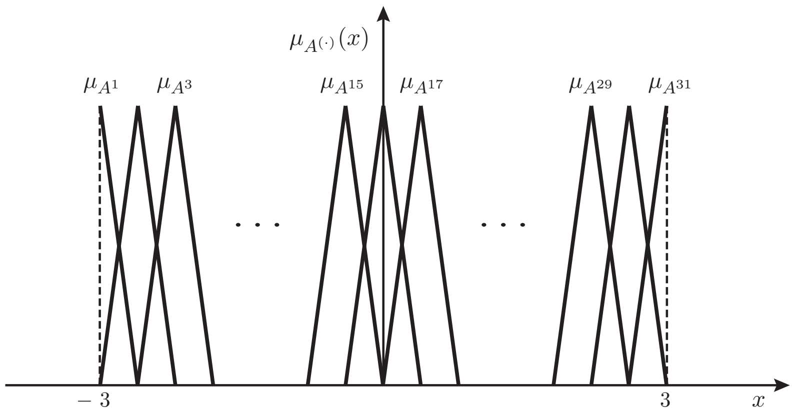
$$f(\mathbf{x}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{M} \bar{y}^k \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i) \right)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i) \right)}, \tag{8.1}$$

где је $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$ улаз у фази систем и $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{R}$ је излаз фази система.

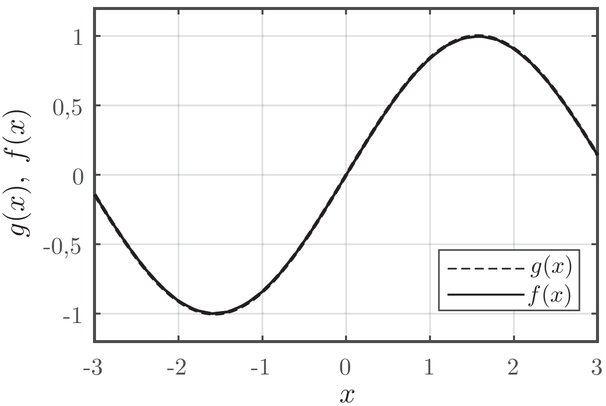
Доказ. Сменом (7.1) у (6.16) имамо да је

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,\dots,M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i^*) \, \mu_{B_k}(y) \right]. \tag{8.2}$$

Како је за дати улаз x_i^* центар k-тог фази скупа у (8.2) (тј. фази скупа са функцијом припадности $\mu_{A_i^k}(x_i^*)\,\mu_{B_k}(y)$) у ствари центар од B^k, то значи да је $\bar{y}^k$ у (7.8) исто што и $\bar{y}^k$ у овој леми. Поред тога, висина k-тог фази скупа у (8.2) означена са w_k у (7.8) је $\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i^*)\,\mu_{B_k}(\bar{y}^k) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^k}(x_i^*)$ (јер



Слика 8.4: Функције припадности из примера 8.1



Слика 8.5: Пројектовани фази систем $f(x)$ и оригинална функција $g(x)$ из примера 8.1

8.3.4 Фази системи са тачношћу апроксимације другог реда

У претходном пододељку видели смо да се, користећи границе дефинисане у теореми 8.2, захтева обично велики број правила за апроксимацију једноставних функција. У примеру 8.1 показано је да је потребно 31 правило за апроксимацију скаларне функције. Анализирајући (8.17) може се приметити да је граница линеарна функција од h_i. С обзиром на то да h_i обично има малу вредност, ако би граница могла да буде линеарна функција од h_i^2, тада би та граница могла да буде много мања него граница из (8.17). То јест, ако можемо да добијемо мање границе него оне које се користе у (8.17), можда би тада могли да користимо мање правила за апроксимацију исте функције, са истом тачношћу. У наставку, пројектоваћемо фази систем који представља апроксиматор са тачношћу другог реда. И овај пут разматрамо фази системе са два улаза због једноставности означавања, али је овакав прилаз потпуно применљив и за n-улазне фази системе. Проблем пројектовања је исти као у одељку 8.3.2. Најпре ћемо пројектовати фази систем, корак по корак, и потом анализирати његову тачност апроксимације.

- **Корак 1** Дефинишимо $N_i (i = 1, 2)$ фази скупова $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{N_i}$ на $[\alpha_i, \beta_i]$, који су нормални, конзистентни и комплетни са троугластим функцијама припадности

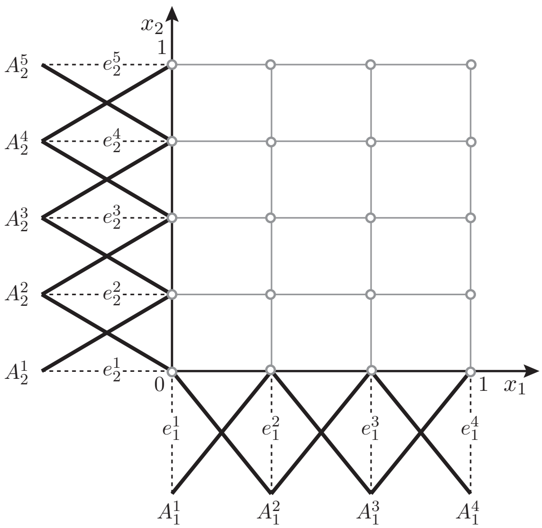
$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}\left(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2\right), \tag{8.23}$$

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}\left(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}\right), \tag{8.24}$$

за $j = 2, 3, \ldots, N_i - 1$, и

$$\mu_{A_i^{N_i}}(x_i) = \mu_{A_i^{N_i}}\left(x_i; e_i^{N_i - 1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}\right), \tag{8.25}$$

где је $i = 1, 2$, и $\alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \cdots < e_i^{N_i} = \beta_i$. Слика 8.6 приказује један пример за $N_1 = 4, N_2 = 5, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = 1$.



Слика 8.6: Пример фази скупова дефинисаних у кораку 1 процедуре пројектовања фази система

- **Корак 2** и **Корак 3** Ова два корака су иста као кораци 2 и 3 у процедури пројектовања у пододељку 8.3.2. То јест, пројектовани фази систем је дат са (8.16), где је $\bar{y}^{i_1 i_2}$ дато са (8.15) и $A_1^{i_1}$ и $A_2^{i_2}$ су дати са (8.23)–(8.25).

ПОГЛАВЉЕ

9

Фази идентификација

Фази системи се користе за изражавање, формулисање људског знања. Стога је важно питање: које облике обично има људско знање? Грубо говорећи, људско знање о одређеном инжењерском проблему може се сврстати у две категорије: *свесно* знање и *подсвесно* знање [40]. Под свесним знањем подразумевамо знање које се може експлицитно изразити речима, а подсвесно знање односи се на ситуације у којима стручњаци знају шта треба учинити, али не могу тачно речима да изразе, опишу, како то учинити. На пример, искусни возачи камиона знају да возе камион у врло тешким ситуацијама (имају подсвесно знање), али им је тешко да своје поступке изразе прецизним речима. Чак и ако могу своје акције и поступке да изразе речима, опис је обично непотпун и недовољан за извршење задатка.

За свесно знање можемо једноставно затражити од експерата да га изразе у облику фази **ако-онда** правила и потом да та правила укључимо у пројектовање фази система. Што се тиче подсвесног знања, можемо само да тражимо од експерата да покажу шта раде у неким типичним ситуацијама. Када експерт демонстрира, посматрамо га као црну кутију и меримо улазе и излазе; то јест, можемо прикупити скуп улазно-излазних парова података. На тај начин се подсвесно знање трансформише у скуп улазно-излазних парова. Са друге стране, улазно-излазни подаци могу да представљају резултате експеримента на посматраном објекту управљања, и те податке можемо искористити за идентификацију фази модела објекта. Стога, један од фундаменталних проблема и јесте пројектовање фази система на основу улазно-излазних парова.

Са концептуалне тачке гледишта, пројектовање фази система на основу улазно-излазних парова може се класификовати на два прилаза. У првом прилазу, прво се из улазно-излазних парова генеришу фази **ако-онда** правила, и фази систем се потом пројектује на основу ових правила, а према извесним изборима фази закључивања, фазификатора и дефазификатора. Један такав прилаз представља такозвано учење из примера, или метода табеле правила (енг. lookup table). У другом прилазу, најпре се дефинише структура фази система и неки параметри те структуре остају слободни, Приметимо да је

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{M} \bar{y}^k \mu_k(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{M} \mu_k(\mathbf{x})} = \frac{\bar{y}^1 \mu_1(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{M} \mu_k(\mathbf{x})} + \frac{\bar{y}^2 \mu_2(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{M} \mu_k(\mathbf{x})} + \ldots + \frac{\bar{y}^M \mu_M(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{M} \mu_k(\mathbf{x})},$$

и ако уведемо ознаку

$$\xi_k(\mathbf{x}) = \frac{\mu_k(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{M} \mu_k(\mathbf{x})}, \tag{9.20}$$

тада једначина (9.19) постаје:

$$f(\mathbf{x}) = \bar{y}^1 \xi_1(\mathbf{x}) + \bar{y}^2 \xi_2(\mathbf{x}) + \ldots + \bar{y}^M \xi_M(\mathbf{x}). \tag{9.21}$$

Даље, ако дефинишемо векторе

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \xi_1(\mathbf{x}) & \xi_2(\mathbf{x}) & \ldots & \xi_M(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \tag{9.22}$$

и

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \bar{y}^1 & \bar{y}^2 & \ldots & \bar{y}^M \end{bmatrix}^T, \tag{9.23}$$

тада је

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}. \tag{9.24}$$

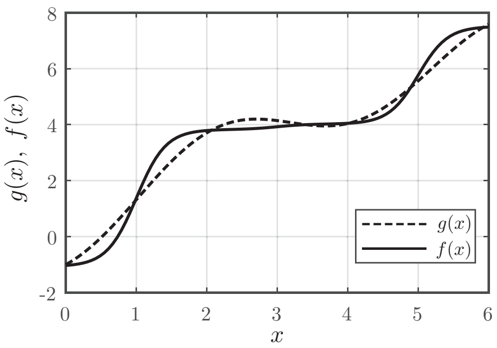
Ово показује да облик фази модела, односно система који треба да се подеси, одговара облику за примену методе најмањих квадрата, (9.2). Упоређујући једначине (9.24) и (9.2), јасно је да у опису фази система $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ представља вектор независних променљивих, тј. вектор регресора $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$. Елементи вектора $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, функције дефинисане у (9.20), се називају и *фази базисне функције*. У том смислу, $\xi_k(\mathbf{x})$ представља фази базисну функцију k-тог правила. Јасно је, из претходне анализе, да се пакетна или рекурзивна метода најмањих квадрата може користити за обучавање одређене класе фази система, и то оне, која се може параметаризовати да буде линеарна по параметрима, као у (9.24). Ова идеја ће у наставку бити детаљно приказана и имплементирана за општи случај вишеструко преносног фази система, који има више улазних и једну излазну величину.

9.1.4 Пројектовање фази система применом линеарне методе најмањих квадрата

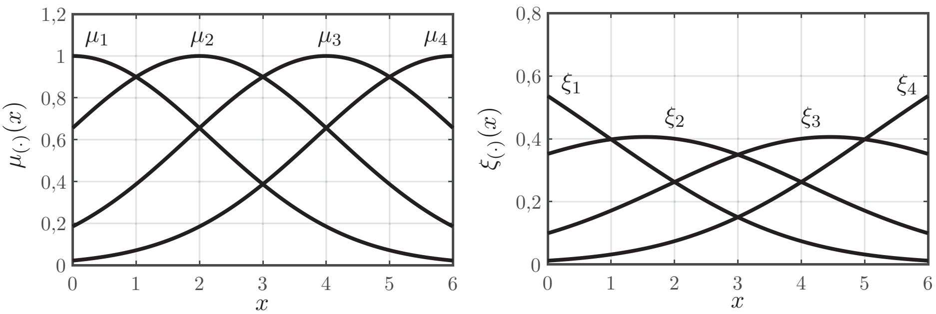
Претпоставимо да имамо следеће улазно излазне парове:

$$(\mathbf{x}^p, y^p), \quad p = 1, 2, \ldots, N \tag{9.25}$$

где $\mathbf{x}^p \in \mathcal{X} = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n] \subset \mathcal{R}^n$ и $y^p \in \mathcal{Y} = [\alpha_y, \beta_y] \subset \mathcal{R}$. Наш задатак је да пројектујемо фази систем $f(\mathbf{x})$ који минимизује суму грешака за све



Слика 9.5: Нелинеарна функција $g(x)$ и њена фази апроксимација из примера 9.2 за $\sigma = 0,9114$



а) б)

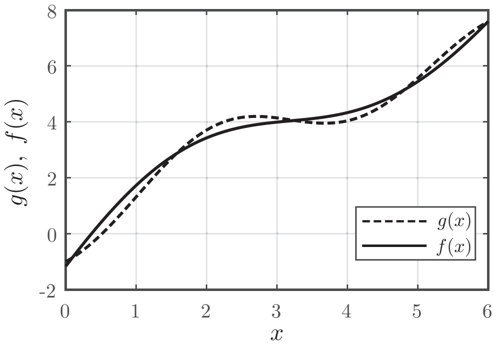
Слика 9.6: Улазне функције припадности а) и фази базисне функције б) из примера 9.2 за $\sigma = 3,0808$

тачно апроксимирале функцију $g(x)$ која се брже мења од њих.

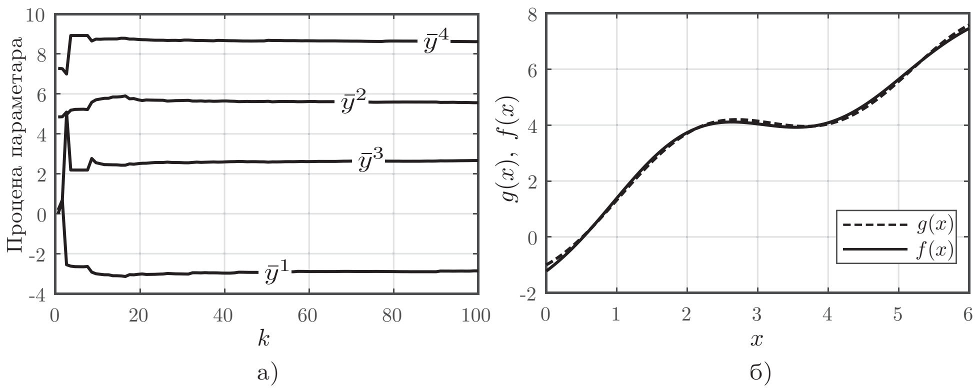
Овај пример илуструје значај избора адекватних улазних функција припадности у примени линеарне методе најмањих квадрата.

Пример 9.3 Посматрамо систем (9.39) из примера 9.2. Овај пут користићемо рекурзивну методу најмањих квадрата да одредимо фази систем $f(x)$ који апроксимира дату нелинеарну функцију $g(x)$. Нека је фази систем одређен са 4 фази правила, 4 улазна фази скупа дефинисана Гаусовим функцијама припадности са слике 9.2а и 4 подесива излазна фази скупа дефинисана својим центрима (на пример, синглтони фази скупови). Дакле, параметри улазних функција припадности (центри и ширине Гаусових функција) су фиксни. Фази систем се мења током итеративног поступка, и естимације параметара добијене рекурзивним алгоритмом методе најмањих квадрата са улазом $x(k)$ дефинисаним као случајна променљива са равномерном расподелом на интервалу $[0, 6]$ за свако k, почетним вектором параметара једнаким нули, и за $P(0) = 10^5$, приказане су на слици 9.8а.

Естимација параметара почиње од њихових почетних вредности (изабране нулте вредности), мењају се током времена и конвергирају након 100



Слика 9.7: Нелинеарна функција $g(x)$ и њена фази апроксимација из примера 9.2 за $\sigma = 3,0808$

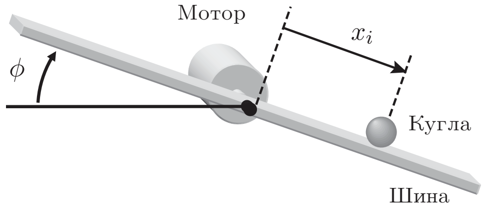


Слика 9.8: Примена рекурзивне методе најмањих квадрата у примеру 9.3: а) промена параметара фази система и б) нелинеарна функција $g(x)$ и њена апроксимација фази системом

корака константим вредностима $\bar{\mathbf{y}}^* = \begin{bmatrix} -2,8641 & 5,5576 & 2,6636 & 8,6157 \end{bmatrix}$. Међутим, ове финалне вредности нису јединствене. Оне зависе од улаза $x(k)$, који представља случајни низ. Према томе, финални параметри ће бити различити сваки пут када се алгоритам покрене. Слика 9.8б приказује поређење фази система са оригиналном функцијом $g(x)$ за добијене вредности параметара. Апроксимација је прилично добра, али свакако може бити и боља ако се искористи комплекснији фази систем (више правила).

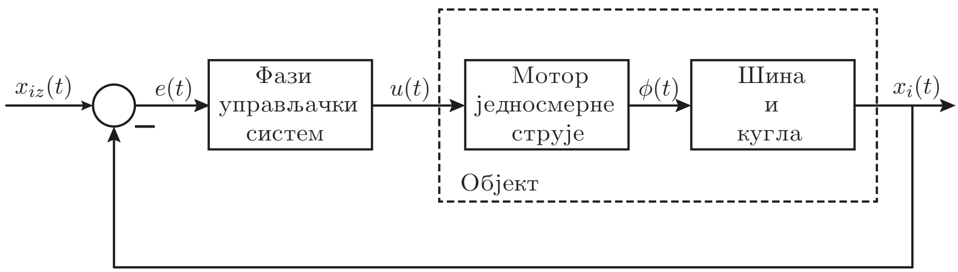
9.2 Пројектовање фази система применом градијентне методе

Некада може да буде пожељно да се подешавају и параметри улазних функција припадности, као што је то био случај са параметрима (тачније, центрима) излазних функција припадности код метода најмањих квадрата.



Слика 11.1: Систем шина-кугла

контролера није потребан математички модел система, па стога и није заснован на моделу. Његово пројектовање се заснива на стручном знању. Већина објеката који се управљају су временски непрекидни системи, па су њихови улази и излази непрекидне функције времена. Ако је циљ управљања праћење, конфигурација система управљања обично укључује јединичну негативну повратну спрегу, слика 11.2. Када је управљачки систем један фази систем, добија се конфигурација као на слици. Уочимо да мотор једносмерне струје (као извршни орган) и систем кугла-шина представљају заједно објект (проширени објект). На слици 11.2, излаз из сабирача



Слика 11.2: Затворени систем управљања система кугла-шина

је грешка праћења. Фази управљачки систем узима грешку за свој улаз и генерише улаз у објект (управљање), како би га натерао да следи задату вредност. У наставку, пројектоваћемо фази контролер на бази само стручног знања о начину управљања система. Стога нам неће бити потребан модел објекта.

11.1.1 Почетно подешавање фази контролера

За потребе симулације, користићемо поједностављени модел система у облику

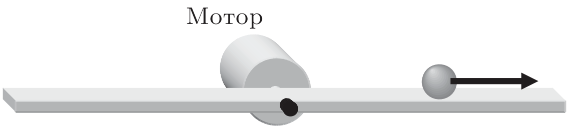
$$\ddot{x}_i(t) = g \sin ku. \tag{11.1}$$

На слици 11.1 $x_i(t)$ представља позицију кугле дуж шине (излазна величина система), где $x_i = 0$ представља центар шине, а $\phi(t)$ је угао шине коју заокреће мотор, и $\phi = 0$ одговара хоризонталном положају. Улаз у систем кугла-шина је напон $u(t)$ који се доводи на мотор. Угао шине је пропорнапредовање кугле удесно, и помакнула је лево према средишту шине.

Ово је један пример хеуристичког експертског знања: оно се заснива на нашем претходном искуству и логици, не на математичком моделу система. Комплетна база правила за фази контролер се може конструисати користећи ово ,,експертско знање" у свакој од 25 могућих комбинација фази скупова за e и $\dot{e}$. У наставку ћемо анализирати неколико сценарија како бисмо предочили како је конструисана база правила.

Случај 1: e је NL **и** $\dot{e}$ је NL

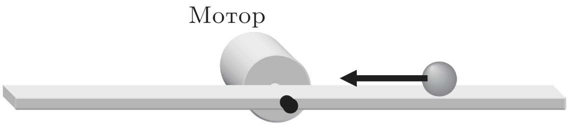
Ова ситуација је приказана на слици 11.6 (дугачка стрелица означава брзо кретање удесно). У овом случају, с обзиром на то да се кугла брзо креће удесно што даље од центра шине, u треба да има велику и негативну вредност (тј. NL), како би се брзо заокренула шина у смеру супротном смеру казаљке на сату и померила куглу улево.



Слика 11.6: Систем кугла-шина, правило e је NL **и** $\dot{e}$ је NL

Случај 2: e је NL **и** $\dot{e}$ је PL

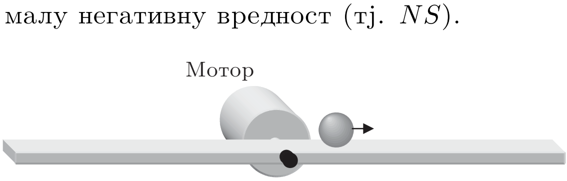
Слика 11.7 илуструје ову ситуацију, где се куглица брзо креће улево према средишту шине, па није потребно окретање шине. Дакле, u би требало да буде нула (тј. Z).



Слика 11.7: Систем кугла-шина, правило e је NL **и** $\dot{e}$ је PL

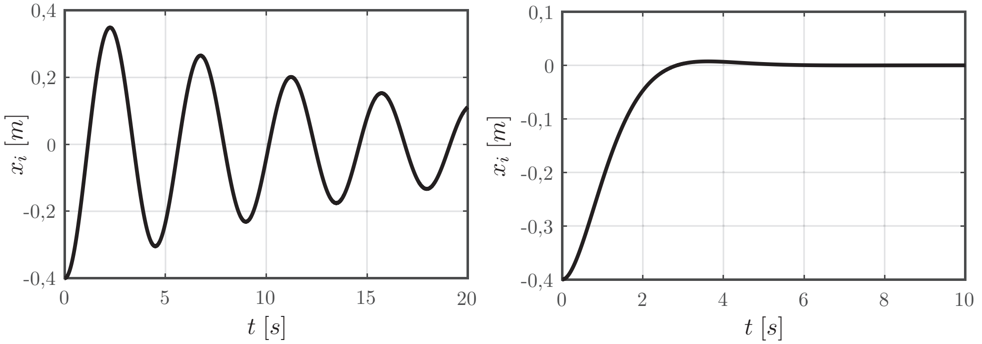
Случај 3: e је Z **и** $\dot{e}$ је NS

Ова ситуација је приказана на слици 11.8 (мала стрелица означава споро кретање удесно). У овом случају, како се кугла креће споро удесно удаљавајући се од центра шине, потребно је благо окретање у смеру супротном смеру казаљке на сату да би се она вратила назад. Према томе, u би требало да има малу негативну вредност (тј. NS).



Слика 11.8: Систем кугла-шина, правило e је Z **и** $\dot{e}$ је NS

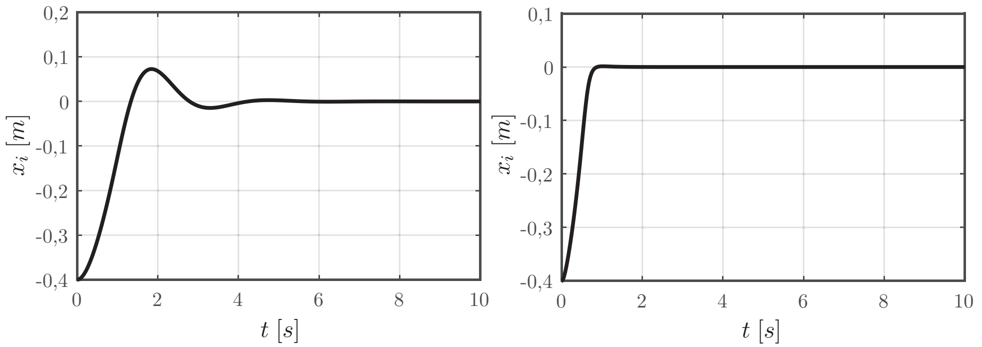
Претходна три сценарија рефлектују нашу логику, тј. наше ,,експертско знање" о томе како куглу уравнотежити да остане непомична у центру смањене, али кугли је потребно 6 s да дође до центра шине и ту остане непомична, што је сувише споро.



а) б)

Слика 11.10: Позиција кугле: а) $G_e = 1$, $G_{\dot{e}} = 1$ и $G_u = 1$, и б) $G_e = 1$, $G_{\dot{e}} = 18$ и $G_u = 1$

Да бисмо убрзали одзив, повећали смо вредност G_e, тј. $G_e = 3$, док смо вредност за $G_{\dot{e}}$ задржали непромењену, $G_{\dot{e}} = 18$. Резултујући одзив је приказан на слици 11.11а. Време које је потребно кугли да достигне центар шине је значајно смањено, али смо добили прескок у одзиву. Када



а) б)

Слика 11.11: Позиција кугле: а) $G_e = 3$, $G_{\dot{e}} = 18$ и $G_u = 1$, и б) $G_e = 3$, $G_{\dot{e}} = 18$ и $G_u = 7$

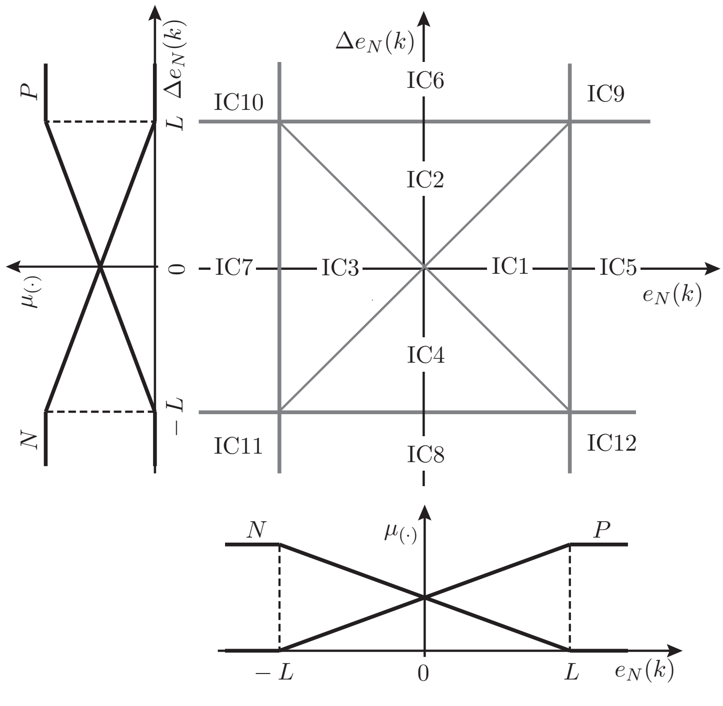
повећамо вредност излазног фактора скалирања G_u на 7, тј. $G_u = 7$, док G_e и $G_{\dot{e}}$ задржимо непромењене, добија се резултат са слике 11.11б.

Ово је задовољавајуће понашање; кугла долази у средиште шине унутар временског интервала од 1 s, без прескока. Међутим, имајмо на уму да, са вредношћу $G_u = 7$, контролер сада захтева да извор напајања за мотор може дати напоне у распону $-70 \leq v \leq 70$ V при струјама које захтева мотор. Ако такво напајање није доступно, можда ће бити потребно да се прихвати спорији одзив. О управљачком сигналу потребном за извршење

12.3 Фази ПИ/ПД контролери линеарни у деловима

Сада ћемо анализирати фази контролер који се разликује од претходног линеарног фази ПИ контролера у следећим аспектима: (1) користи се Задеов **и** логички оператор; (2) користи се Задеов или Лукашијевичев **или** логички оператор, и (3) користи се линеарни дефазификатор. Као што ће се видети, нова конфигурација резултује у деловима линеарним фази контролером тако да је излаз контролера у деловима линеарна функција његовог улаза.

Због коришћења Задеовог фази **и** оператора (функција min), како би се добили аналитички изрази резултата евалуације премиса правила, потребно је поделити раван $e_N(k)$–$\Delta e_N(k)$ у 12 области, од којих се свака назива *улазна комбинација* (IC, краће). Означене су са IC1 до IC12, као што је приказано на слици 12.4. Сврха поделе улазног простора на ових 12 области



Слика 12.4: Подела простора улаза $e_N(k)$–$\Delta e_N(k)$ на 12 улазних комбинација у циљу евалуације фази правила

је да се свакој области, и за свако правило, добије резултат евалуације логичких **и** операција (тј. премиса правила), и табела 12.1 приказује добијене резултате. Фази **или** операција се користи за комбиновање излаза фази скупа Z за правила r_2 и r_3. Може се користити или Лукашијевичев или Задеов фази **или** оператор (односно, Задеова или Лукашијевичева S-

норма), али за овај фази контролер резултат ће бити потпуно иста структура контролера, јер се две вредности припадности за синглтон фази скуп Z множе са 0 у линеарном дефазификатору. Као метода закључивања користи се Мамданијева метода заснована на операцији минимум. Будући да су излазни фази скупови синглтони, Мамданијева и Ларсенова метода закључивања дају исти резултат.

Табела 12.1: Функције припадности добијене као резултат фази правила анализом свих улазних области применом Задеове T-норме и Лукашијевичеве S-норме

IC	r_1	r_2	r_3	r_4
1	$\mu_P(\Delta e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$	$\mu_N(e_N)$	$\mu_N(e_N)$
2	$\mu_P(e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$	$\mu_N(e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$
3	$\mu_P(e_N)$	$\mu_P(e_N)$	$\mu_P(\Delta e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$
4	$\mu_P(\Delta e_N)$	$\mu_P(e_N)$	$\mu_((\Delta e_N)$	$\mu_N(e_N)$
5	$\mu_P(\Delta e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$	0	0
6	$\mu_P(e_N)$	0	$\mu_N(e_N)$	0
7	0	0	$\mu_P(\Delta e_N)$	$\mu_N(\Delta e_N)$
8	0	$\mu_P(e_N)$	0	$\mu_N(e_N)$
9	1	0	0	0
10	0	0	1	0
11	0	0	0	1
12	0	1	0	0

Усвојена фази правила, са функцијама припадностима и IC областима, користиће се за добијање фази закона управљања за сваку област.

Да бисмо детаљније показали како се добија структура, узећемо један пример, област IC1. Најпре, може се уочити да је у области IC1 вредност грешке $e_N(k)$ у опсегу $[0, L]$, а вредности извода грешке $\Delta e_N(k)$ у опсегу $[-L, L]$. Takoђе, важи да је $|\Delta e_N(k)| \leq |e_N(k)|$. На основу тога и коришћењем функције min за логичку функцију **и**, анализом правила r_1 се добија:

$$\textbf{Ако } e_N \text{ je } P \textbf{ и } \Delta e_N \text{ je } P :\rightarrow \min\{\mu_P(e_N), \mu_P(\Delta e_N)\} = \mu_P(\Delta e_N). \qquad (12.23)$$

Према томе, правило r_1 као резултат даје:

$$r_1 : \begin{cases} \text{премиса: изабрана улазна функција припадности је } \mu_P(\Delta e_N), \\ \text{одговарајућа вредност излазне функције припадности је } \mu_P(\Delta u_N). \end{cases}$$

Слично, у области IC1 за правила r_2, r_3 и r_4 се добија:

$$r_2 : \begin{cases} \text{премиса: изабрана улазна функција припадности је } \mu_N(\Delta e_N), \\ \text{одговарајућа вредност излазне функције припадности је } \mu_Z(\Delta u_N); \end{cases}$$

$$r_3 : \begin{cases} \text{премиса: изабрана улазна функција припадности је } \mu_N(e_N), \\ \text{одговарајућа вредност излазне функције припадности је } \mu_Z(\Delta u_N); \end{cases}$$

$$r_4: \begin{cases} \text{премиса: изабрана улазна функција припадности је } \mu_N(e_N), \\ \text{одговарајућа вредност излазне функције припадности је } \mu_N(\Delta u_N). \end{cases}$$

Применом линеарног дефазификатора, у области IC1 се добија

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= K_{\Delta u}\left(\mu_P(\Delta e)\cdot H + \mu_N(\Delta e)\cdot 0 + \mu_N(e)\cdot 0 + \mu_N(e)\cdot(-H)\right) \\ &= \frac{K_{\Delta u}K_e H}{2L}e(k) + \frac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L}\Delta e(k). \end{aligned} \tag{12.24}$$

Користећи линеарни дефазификатор, добија се структура контролера за свих 12 области у табели 12.2.

Табела 12.2: Аналитички описи инкременталног излаза фази ПИ контролера у 12 улазно-излазних области

IC	$\Delta u(k) =$
1, 2, 3, 4	$\frac{K_{\Delta u}K_e H}{2L}e(k) + \frac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L}\Delta e(k)$
5	$\frac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L}\Delta e(k) + \frac{K_{\Delta u}H}{2}$
6	$\frac{K_{\Delta u}K_e H}{2L}e(k) + \frac{K_{\Delta u}H}{2}$
7	$\frac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L}\Delta e(k) - \frac{K_{\Delta u}H}{2}$
8	$\frac{K_{\Delta u}K_e H}{2L}e(k) - \frac{K_{\Delta u}H}{2}$
9	$K_{\Delta u}H$
10, 12	0
11	$-K_{\Delta u}H$

Слика 12.5 приказује у тродимензионалном облику како се инкрементални излаз у деловима фази контролера мења са $e(k)$ и $\Delta e(k)$. Очито, излаз контролера се мења са променом улаза на један, у деловима линеаран начин. Поређења ради, приказан је такође и инкрементални излаз одговарајућег линеарног ПИ контролера, дефинисаног као линеарни контролер у областима IC1 до IC4. На основу слике 12.5 и табеле 12.2, може се уочити следеће:

1. У поређењу са (12.5), фази контролер у областима IC1 до IC4 је линеаран ПИ контролер у инкременталном облику, са пропорционалним и интегралним појачањима, следствено:

$$K_p = \frac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L} \text{ и } K_i = \frac{K_{\Delta u}K_e H}{2L};$$

области је непрекидно и глатко. На пример, на граници између IC1 и IC5 где је $e_N(k) = L$ и $\Delta e_N(k)$ може да има било коју вредност, $\Delta u(k)$ за IC1 је $\dfrac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2L}\Delta e(k) + \dfrac{K_{\Delta u}H}{2}$, што је исто као и за IC5.

Укратко, овај фази контролер је линеарни ПИ, П или И контролер у инкременталном облику у областима ICI до IC8. За разлику од класичног ПИ контролера, максимална промена у излазу фази контролера у било којем тренутку одабирања је ограничена. Уопштено, фази контролер је један у деловима линеарни ПИ контролер у областима IC1 до IC12.

Опет, ако заменимо $\Delta u(k)$ са $u(k)$ у четири фази правила, овај фази контролер ће постати у деловима линеарни ПД контролер захваљујући односу између ПИ контролера у инкременталном облику и ПД контролера у позиционом (директном) облику.

12.4 Нелинеарни фази ПИ контролер

12.4.1 Структура и аналитички опис

Проучићемо сада фази контролер који се мало разликује од оног описаног у последњем одељку – уместо линеарног дефазификатора, користићемо методу осредњавања центара (или методу центра сума, свеједно) као дефазификатор. Такав фази контролер је најједноставнији, јер је његова конфигурација минимална с обзиром на број улазних величина, фази скупова и фази правила, за било који функционални фази контролер.

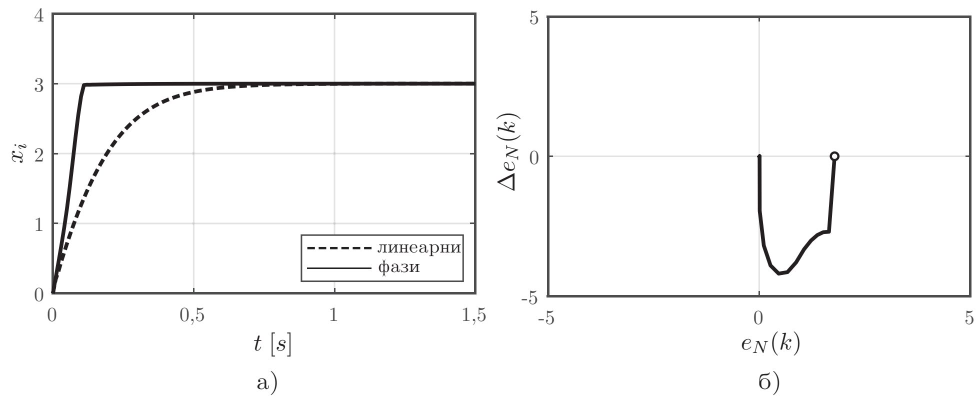
Користећи поступак као у претходном одељку, лако се може наћи аналитичка структура овог фази контролера. Резултат је дат у табели 12.3. Искористићемо област IC1 да прикажемо како се добија резултат дат у табели 12.3. У области IC1, из табеле 12.1 знамо резултате евалуације премиса фази правила применом Задеовог фази **и** оператора. Применом методе осредњавања центара као дефазификатора имамо

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= K_{\Delta u}\frac{\mu_P(\Delta e)\cdot H + \mu_N(e)\cdot(-H)}{\mu_P(\Delta e) + \mu_N(\Delta e) + \mu_N(e) + \mu_N(e)} \\ &= \frac{K_{\Delta u}H}{2\left(2L - K_e e(k)\right)}\left(K_e e(k) + K_{\Delta e}\Delta e(k)\right).\end{aligned} \tag{12.25}$$

Према табели 12.3, фази контролер је нелинеаран ПИ контролер у инкременталној форми када су и $e_N(k)$ и $\Delta e_N(k)$ у областима ICl до IC4. Пропорционално појачање је тада

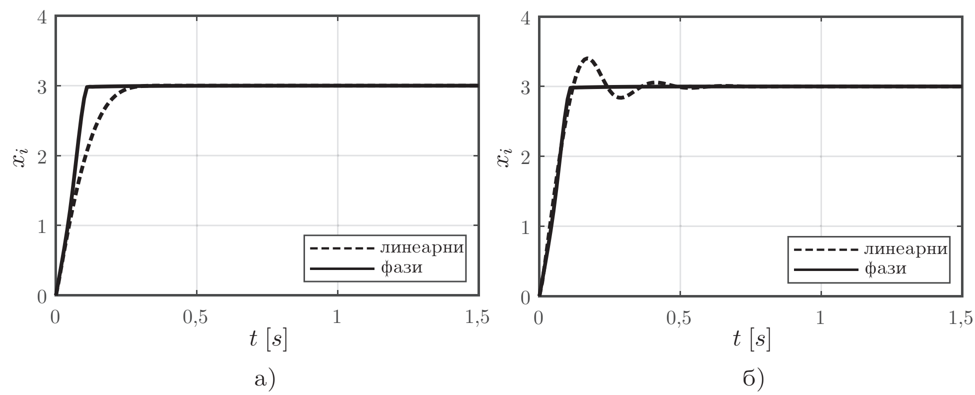
$$K_p(e,\Delta e) = \begin{cases} \dfrac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2\left(2L - K_e|e(k)|\right)}, & \text{за IC1 и IC3} \\ \dfrac{K_{\Delta u}K_{\Delta e}H}{2\left(2L - K_{\Delta e}|\Delta e(k)|\right.}, & \text{за IC2 и IC4}\ , \end{cases} \tag{12.26}$$

а интегрално појачање је



Слика 12.12: Поређење карактеристика у случају управљања нелинеарног система (12.32) нелинеарним фази ПИ контролером и одговарајућим линеарним контролером: а) одзиви система, и б) трајекторија система у простору $e_N(k)$–$\Delta e_N(k)$. За фази контролер параметри су $L = H = 1$, $K_e = 0,595$, $K_{\Delta e} = 12$, и $K_{\Delta u} = 45$. Појачања одговарајућег ПИ контролера су $K_p(0,0) = 135$ и $K_i(0,0) = 6,69375$

Као и код упоређивања у случају система са кашњењем, подесили смо линеарни ПИ контролер како би постигао своје најбоље перформансе у погледу прескока, слика 12.13а. Слично смо покушали да добијемо упоредиво време успона са фази системом управљања, слика 12.13б. Очито је да је фази ПИ контролер још увек пуно бољи.



Слика 12.13: Поређење одзива нелинеарног система (12.32) управљаног нелинеарним фази ПИ контролером и одговарајућим линеарним контролером. Параметри фази контролера су исти као параметри са слике 12.12. За одговарајући линеарни ПИ контролер параметри су а) $K_p(0,0) = 81$ и $K_i(0,0) = 6,69375$, и б) $K_p(0,0) = 56,25$ и $K_i(0,0) = 6,69375$

Важно је истаћи и следеће: за систем са кашњењем (12.31) и нелинеарни систем (12.32) одговор на питање може ли фази ПИ контролер да надмаши линеарни ПИ контролер зависи од вредности параметара. Другим речима,

ПОГЛАВЉЕ

13

Такаги-Сугено фази системи

Фази системи дефинисани у претходним поглављима су били тзв. Мамдани фази системи, или како их другачије називају и *стандардни фази системи*. У овом поглављу, тема су Такаги-Сугено фази системи, који представљају тзв. *функционалне фази системе* [22]. Такаги-Сугено (скраћено ТС) фази системи представљају уопштеније облике система у односу на Мамданијеве системе [36]. Може се показати и да су Мамдани фази системи у ствари специјалан случај ТС фази система.

Код ТС фази система, последице правила не укључују фази скупове као Мамданијеви системи, већ су то математички изрази. Математички изрази могу бити било које функције, било које величине, тј. променљиве. У наставку ћемо разматрати само случајеве када су закључци фази правила или нemеморијске функције улазних величина фази система, или један од облика линеарног динамичког система. У првом случају, ТС фази систем врши интерполацију између нemеморијских функција. У другом, ТС фази систем врши интерполацију између динамичких система, што је корисно за фази идентификацију и управљање.

13.1 ТС фази системи као интерполатори линеарних пресликавања

ТС фази систем се формира из скупа фази правила, при чему је i-то правило r_i облика

$$\textbf{Ако } x_1 \text{ је } A_1^i \textbf{ и } x_2 \text{ је } A_2^i \textbf{ и } \dots \textbf{ и } x_n \text{ је } A_n^i \textbf{ онда } q_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (13.1)$$

где је $i = 1, 2, \dots, M$, а M је број фази правила. Као и код Мамдани фази система, улазне величине x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ су дефинисане различитим фази скуповима на универзалним скуповима $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$, следствено, и у премисама правила нема разлике. Међутим, закључци правила су различити. Уместо лингвистичких појмова са придруженим функцијама припадности, односно фази скупова, код ТС система се користе неменориј-

14.1 Континуални системи

Нека је фази модел објекта одређен базом правила (13.8) и аналитичким описом (13.10) и (13.11). PDC контролер за овај систем је нови фази систем са M правила облика:

Управљачко правило i:

$$\begin{aligned} &\textbf{Ако } z_1(t) \text{ је } M_1^i \textbf{ и } z_2(t) \text{ је } M_2^i \textbf{ и } \cdots \textbf{ и } z_p(t) \text{ је } M_p^i, \\ &\qquad\qquad \textbf{онда } \mathbf{u}(t) = -F_i\mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, M. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Фази управљачка правила имају у својим закључцима линеарни контролер (у овом случају закон управљања са повратном спрегом по стању). Можемо користити и друге контролере, на пример, контролере са повратном спрегом по излазу, или динамичке контролере са повратном спрегом по излазу, уместо овај са спрегом по величинама стања.

Укупни фази контролер је представљен законом управљања

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\mathbf{z}(t))F_i\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\mathbf{z}(t))} = -\sum_{i=1}^{M} \xi_i(\mathbf{z}(t))F_i\mathbf{x}(t). \tag{14.2}$$

Пројектовање фази контролера се своди на одређивање локалних појачања повратних спрега $\boldsymbol{F}_i$ у закључцима правила. За разлику од неких других техника нелинеарног управљања, PDC метода нуди једноставну и природну процедуру за третирање нелинеарних система управљања.

Напомена 14.1 *Иако је фази контролер* (14.2) *пројектован коришћењем локалне структуре пројектовања, појачања у повратним спрегама* F_i *треба одредити коришћењем глобалних услова пројектовања. Глобални услови пројектовања потребни су како би се гарантовала глобална стабилност и квалитет управљања.*

Када желимо да говоримо о стабилности фази система, размотримо најпре систем у отвореном колу дејства, који се добија из (13.10):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{M} \xi_i(\mathbf{z}(t))A_i\mathbf{x}(t) \tag{14.3}$$

Теорема 14.1 даје довољне условне стабилности нултог равнотежног стања система (14.3).

Теорема 14.1 *Равнотежно стање* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *фази система* (14.3) *је глобално асимптотски стабилно ако постоји заједничка позитивно одређена симетрична матрица* P *тако да важи*

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M. \tag{14.4}$$

Ова теорема се своди на Љапуновљеву теорему о стабилности (за временски непрекидне) линеарне системе када је $M = 1$.

У недостатку системских поступака за проналажење заједничке позитивно одређене матрице P, у циљу провере стабилности фази система (14.3) користи се, на пример, метода покушаја и погрешке, или неки други поступци за одређене класе система (на пример, једна таква постоји за системе другог реда). Међутим, проблем налажења заједничке матрице P се може ефикасно решити техникама конвексне оптимизације за линеарне матричне неједнакости. Да би се то постигло, врло је важно опажање да су услови стабилности из теореме 14.1 изражени управо линеарним матричним неједнакостима. Дакле, да би се испитала стабилност, неопходно је наћи заједничку матрицу P или показати да таква матрица не постоји, и то представља тзв. проблем линеарне матричне неједнакости, (енг. Linear Matrix Inequality), краће LMI проблем. LMI проблеми се могу ефикасно решити нумерички, помоћу неких од моћних алата који су доступни у литератури о математичком програмирању.

Природно, поставља се питање да ли је систем (14.3) стабилан ако су његови подсистеми стабилни, тј. ако су све матрице A_i стабилне? Одговор је негативан, у општем случају.

Размотримо сада затворени систем управљања, чији се аналитички опис добија заменом закона управљања (14.2) у једначину (13.10):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \xi_i(\mathbf{z}(t))\xi_j(\mathbf{z}(t)) \left\{A_i - B_i F_j\right\} \mathbf{x}(t) \tag{14.5}$$

Применом теореме 14.1, добијају се следећи довољни услови за стабилност нултог равнотежног стања система (14.5).

Теорема 14.2 *Равнотежно стање* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *фази система* (14.5) *је глобално асимптотски стабилно ако постоји заједничка позитивно одређена симетрична матрица* P *тако да важи*

$$(A_i - B_i F_j)^T P + P(A_i - B_i F_j) < 0, \tag{14.6}$$

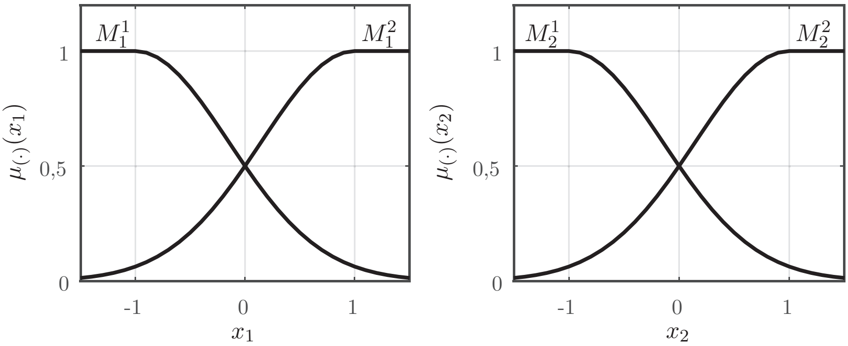
за $\xi_i(\mathbf{z}(t)) \cdot \xi_j(\mathbf{z}(t)) \neq 0, \forall t, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M.$

14.2 Дискретни системи

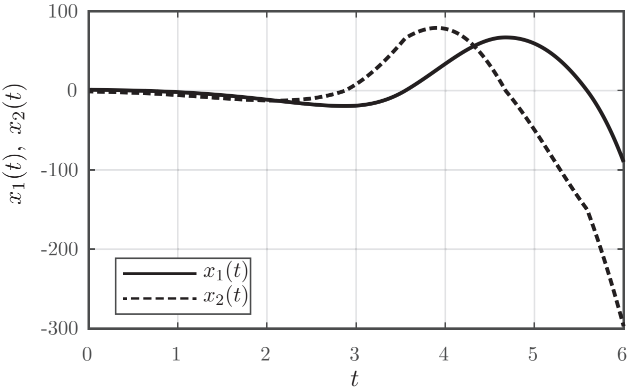
Нека је фази модел објекта одређен базом правила (13.9) и аналитичким описом (13.17) и (13.18). PDC контролер за овај систем је нови фази систем са M правила облика:

Управљачко правило i:

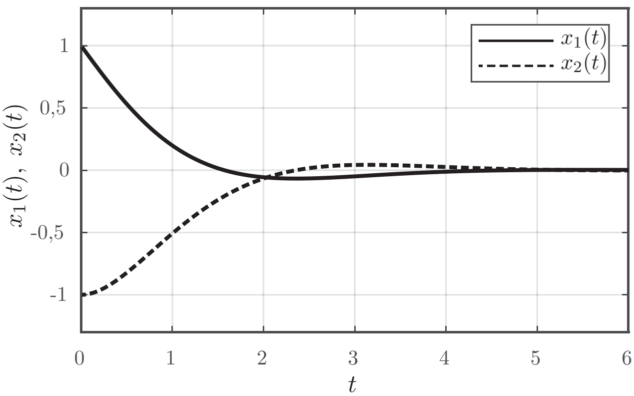
$$\begin{aligned} &\textbf{Ако } z_1(k) \text{ је } M_1^i \textbf{ и } z_2(k) \text{ је } M_2^i \textbf{ и} \cdots \textbf{ и } z_p(k) \text{ је } M_p^i, \\ &\qquad\qquad \textbf{онда } \mathbf{u}(k) = -F_i \mathbf{x}(k), \quad i = 1, 2, \ldots, M. \end{aligned} \tag{14.7}$$



Слика 14.1: Фази скупови за x_1 и x_2



Слика 14.2: Интегралне трајекторије стања континуалног ТС објекта у отвореном колу дејства



Слика 14.3: Интегралне трајекторије стања континуалног ТС објекта са паралелно дистрибуираним управљањем методом подешавања полова